Ευστάθεια αλγορίθμων

Είδαμε στην περίπτωση του $e^{-x}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ το άθροισμα που χρησιμοποιήσαμε ήταν εξαιρετικά ευαίσθητο σε σφάλματα στρογγυλοποίησης. Αυτός ο αλγόριθμος καλείται ασταθής, ενώ στην αντίθετη περίπτωση ευσταθής.

Παράδειγμα

Ξέρω ότι $e^{-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ ασταθής

Επίσης $e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ευσταθής

Άρα $e^{-x}=\frac{1}{e^x}=\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{2}+\dots}$ ευσταθής

Παράδειγμα

Το ολοκλήρωμα $I_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}dx$, $n=1,2,3,\dots$

$$=\frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx$$

Παρατήρηση $\int_0^1 x^n e^{\lambda x}dx=\int_0^1 \frac{d^n}{d\lambda^n}\left(e^{\lambda x}\right)dx=$

$=\frac{d^n}{d\lambda^n}\int_0^1 e^{\lambda x}dx=\frac{d^n}{d\lambda^n}\frac{e^{\lambda}-1}{\lambda}$, $\lambda=1$

Επιστρέφουμε, με στοιχειώδη παραγοντική ολοκλήρωση στο $I_n=\int_0^1 x^n e^{x-1}dx=x^n e^{x-1}\Big|_0^1-\int_0^1 n x^{n-1}e^{x-1}dx=$

$=1-n\int_0^1 x^{n-1}e^{x-1}dx$

Παρατηρώ ότι μέσω της πράξης αυτής δημιουργώ έναν αναδρομικό τύπο για την I_n ΔΣΣ

$I_1 = \frac{1}{e}$, $I_n = 1 - n I_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Το μονο σφαλμα που μπορω να εχω προερχεται από τον υπολογισμό του $\frac{1}{e}$! ΔΙδ $I_1^* = I_1 + \varepsilon_1$

$I_n = 1 - n I_{n-1}^*$

Για $\forall n$ το σφαλμα ειναι $\varepsilon_n = I_n^* - I_n =$
$= 1 - n I_{n-1}^* - (1 - n I_{n-1}) = -n (I_{n-1}^* - I_{n-1}) = -n \varepsilon_{n-1}$
ΔΙδ $\varepsilon_n = -n(\varepsilon_{n-1}) \Longrightarrow \varepsilon_n = (-1)^{n-1} n! \varepsilon_1$

Για να αποφυγουμε τα προσημα $|\varepsilon_n| = n! |\varepsilon_1|$
Προφανως ο αλγόριθμος ειναι ασταθης!
Για μεγαλες τιμες του n το σφαλμα αυξάνεται
με $n!$

<u>Παρατήρηση</u> $10! = 3.628.800$